PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN OLYMPIC THPT*

Nguyễn Duy Thái Sơn (Đại học Sư phạm Đà Nẵng)

Qua bài giảng này, ta sẽ khảo sát một số dạng toán giải tích thường gặp (hoặc có thể gặp) trong các kỳ thi chọn học sinh giỏi THPT quốc gia (VMO). Ta cũng sẽ gặp nhiều dạng toán Olympic mà phát biểu của chúng có vẻ là đại số hay số học thuần túy (hoặc cả hai), nhưng trong lời giải, phương pháp giải tích đóng vai trò cốt yếu.

1 MỘT SỐ DẠNG TOÁN GIẢI TÍCH THƯỜNG GẶP TRONG CÁC KỲ THI VMO

Trước tiên là một số vấn đề đáng được quan tâm:
- Những năm gần đây trong các kỳ thi IMO (Olympic Toán quốc tế dành cho học sinh THPT) không còn xuất hiện các bài toán giải tích.
- Vậy người ra đề toán giải tích cho VMO (ngày 1) nên có quan điểm như thế nào?
- Và ta cần hiểu kiến thức giải tích bậc THPT bao gồm những nội dung nào?

Bài toán 1 (VMO 2012). *Cho dãy số thực (x_n) xác định bởi*

$$x_1 = 3 \quad \text{và} \quad x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1}+2) \quad \text{với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng dãy số đã cho có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Tìm giới hạn đó.

Lời giải 1.

(i) Trước hết, nhận xét:

$$\forall n \geq 1, x_{n+1} - x_n = \left(\frac{n+3}{3(n+1)} - 1\right) x_n + \frac{2(n+3)}{3(n+1)} = \frac{2}{3(n+1)}(n+3-nx_n).$$

(ii) Tiếp theo, bằng quy nạp, ta chứng minh được: $\forall n \geq 2, x_n > \dfrac{3}{n} + 1.$

*Đây là nội dung bài giảng được tác giả trình bày tại các lớp Tập huấn Giáo viên THPT chuyên Khu vực phía Nam (Nha Trang - 7/2016) và Khu vực phía Bắc (Vĩnh Phúc - 8/2016) do "Chương trình trọng điểm Quốc gia phát triển Toán học giai đoạn 2010-2020", Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán, tổ chức.

Thật vậy, dễ thấy $x_2 = \dfrac{10}{3} > \dfrac{3}{2} + 1$. Giả sử đã có $x_k > \dfrac{3}{k} + 1$ với $k \geq 2$ nào đó. Lúc này,

$$x_{k+1} = \frac{k+3}{3(k+1)}(x_k + 2) > \frac{k+3}{3(k+1)}\left(\frac{3}{k} + 3\right) = \frac{k+3}{k} = \frac{3}{k} + 1 > \frac{3}{k+1} + 1.$$

(iii) Từ (i) và (ii) suy ra $x_n > x_{n+1} > 1 \quad \forall n \geq 2$. Vậy, dãy $(x_n)_{n=2}^{+\infty}$ giảm và bị chặn dưới nên nó có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$. Dùng hệ thức truy hồi của dãy, dễ thấy $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$.

Lời giải 2.

(i) Trước hết, viết lại hệ thức truy hồi của dãy dưới dạng:

$$\frac{x_i}{i+2} = \frac{x_{i-1}}{3i} + \frac{2}{3i} \Rightarrow \frac{3^i x_i}{(i+1)(i+2)} - \frac{3^{i-1}x_{i-1}}{i(i+1)} = \frac{2\cdot 3^{i-1}}{i(i+1)}$$

rồi lấy $\sum_{i=2}^{n}$ hai vế ta thấy (với mỗi $n \geq 2$):

$$\frac{3^n x_n}{(n+1)(n+2)} - \frac{3^1 x_1}{2\cdot 3} = 2\sum_{i=2}^{n} \frac{3^{i-1}}{i(i+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{3^n x_n}{(n+1)(n+2)} = \frac{3}{2} + 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{3^k}{(k+1)(k+2)} \Rightarrow x_n = c_n + 2\frac{a_n}{b_n}$$

trong đó

$$c_n := \frac{(n+1)(n+2)}{2\cdot 3^{n-1}} \underset{(n\to+\infty)}{\longrightarrow} 0,\, a_n := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3^k}{(k+1)(k+2)} \text{ và } b_n := \frac{3^n}{(n+1)(n+2)}.$$

(ii) Tiếp theo, xét hàm số $f(x) := \dfrac{3^x}{(x+1)(x+2)}$; ta có

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x+1)(x+2)3^x \ln 3 - 3^x(2x+3)}{(x+1)^2(x+2)^2} \\ &= \frac{3^x}{(x+1)^2(x+2)^2}\big((\ln 3)x^2 + (3\ln 3 - 2)x + 2\ln 3 - 3\big) > 0 \end{aligned}$$

khi x đủ lớn. Vậy, với n_0 đủ lớn, dãy $(b_n)_{n=n_0}^{+\infty}$ tăng ngặt (ra $+\infty$).

(iii) Cuối cùng, dùng định lý Stolz, ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{3^n}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{3^{n+1}}{(n+2)(n+3)} - \dfrac{3^n}{(n+1)(n+2)}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{3}{n+3} - \dfrac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{2n} = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

suy ra: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(c_n + 2\dfrac{a_n}{b_n}\right) = 0 + 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1.$

Ghi chú. Trong Lời giải 2, ta có thể hoàn thành bước (ii) một cách đại số như sau: $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \dfrac{3(n+1)}{n+3} > 1$ (với mọi $n \geq 2$) nên dãy $(b_n)_{n=2}^{+\infty}$ tăng ngặt (ra $+\infty$).

Bài toán 2 (RMC 2007 Shortlist, do Marcel Chiriţă đề nghị). *Giải hệ phương trình:*

$$\begin{cases} x(3y^2+1) &= y(y^2+3) \\ y(3z^2+1) &= z(z^2+3) \\ z(3x^2+1) &= x(x^2+3). \end{cases}$$

Có thể xem hệ phương trình trong Bài toán 2 là một trường hợp riêng, khi $a = 1/\sqrt{3}$, của hệ trong bài toán sau:

Bài toán 3. *Giải và biện luận (theo tham số $a \in \mathbb{R}$) hệ phương trình:*

$$\begin{cases} 2x(y^2+a^2) &= y(y^2+9a^2) \\ 2y(z^2+a^2) &= z(z^2+9a^2) \\ 2z(x^2+a^2) &= x(x^2+9a^2). \end{cases}$$

Lời giải.

(i) Với $a = 0$, hệ đã cho kéo theo:

$$\begin{cases} 2xy^2 &= y^3 \\ 2yz^2 &= z^3 \\ 2zx^2 &= x^3 \end{cases} \Rightarrow 8x^3y^3z^3 = \prod_{\text{cyc}} 2xy^2 = \prod_{\text{cyc}} y^3 = x^3y^3z^3 \Rightarrow xyz = 0;$$

từ đó, hệ có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

(ii) Với mỗi $a \neq 0$, xét hàm số $f(x) := \dfrac{x(x^2+9a^2)}{2(x^2+a^2)}$; ta có:

$$f'(x) = \frac{(x^2-3a^2)^2}{2(x^2+a^2)^2} \geq 0 \ \text{ với mọi } \ x \in \mathbb{R}; \quad f'(x) = 0 \ \text{ chỉ tại } \ x = \pm a\sqrt{3}.$$

Suy ra: f tăng ngặt trên khắp $\mathbb{R}$.

Vì hệ đã cho không thay đổi khi ta hoán vị vòng quanh bộ (x, y, z) nên, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x = \max\{x, y, z\}$. Khi đó, do f tăng ngặt, hệ kéo theo:

$$\begin{cases} f(y) = x \geq y = f(z) \\ f(y) = x \geq z = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq z \\ y \geq x \end{cases} \Rightarrow y = \max\{x, y, z\};$$

và từ đó, cũng có $z = \max\{x, y, z\}$. Vậy, hệ đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} x = y = z \\ x = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x(x^2 - 7a^2) = 0, \end{cases}$$

và hệ có đúng 3 nghiệm: $(0, 0, 0)$, $(a\sqrt{7}, a\sqrt{7}, a\sqrt{7})$, $(-a\sqrt{7}, -a\sqrt{7}, -a\sqrt{7})$.

Bài toán 4 (Olympic sinh viên toàn quốc năm 2016, môn Giải tích). *Cho $a \geq 1$ là một số thực và $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:*

- $(f(ax))^2 \leq a^3x^2 f(x)$ *với mọi số thực x;*
- f *bị chặn trên trong một lân cận nào đó của 0.*

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \dfrac{x^2}{a}$ với mọi số thực x.

Lời giải 1 (giải tích).

(i) Trong điều kiện thứ nhất, chọn $x = 0$ ta thấy $f(0)^2 \leq 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Với $x \neq 0$, từ điều kiện này ta cũng có $f(x) \geq \dfrac{f(ax)^2}{a^3x^2} \geq 0$. Vậy, $f(x) \geq 0$ với mọi x.

(ii) Nếu $a = 1$, điều kiện thứ nhất trở thành $f(x)^2 \leq x^2 f(x)$; ta suy ra $f(x) \leq x^2$ với mọi số thực x, nên đpcm là đúng. Bây giờ, xét trường hợp $a > 1$.

(iii) Đặt $g(x) := \dfrac{|f(x)|}{x^2/a} = \dfrac{f(x)}{x^2/a} \geq 0$ với mọi $x \neq 0$. Từ nay, xem $x \neq 0$ và chỉ còn phải chứng minh rằng $g(x) \leq 1$. Theo định nghĩa của g, ta có $f(x) = \dfrac{x^2}{a} g(x)$. Từ đó, viết lại theo g điều kiện thứ nhất như sau:

$$\left(\frac{(ax)^2}{a} g(ax)\right)^2 \leq a^3x^2 \frac{x^2}{a} g(x) \Leftrightarrow g(ax)^2 \leq g(x). \tag{1}$$

Dùng (1), bằng quy nạp theo $n \in \mathbb{N}$, ta thấy:

$$g(x) \leq g\left(\frac{x}{a^n}\right)^{2^{-n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

(iv) Theo điều kiện thứ hai, tồn tại $m, M \in (0, \infty)$ sao cho $(0 \leq)\ f(t) \leq M$ khi $|t| < m$. Vì $a > 1$ nên cũng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ (phụ thuộc vào x) để $\left|\dfrac{x}{a^n}\right| < m$ với mọi $n \geq n_0$; và với các số tự nhiên n như thế, (2) kéo theo

$$g(x) \leq \left(\frac{f\left(\dfrac{x}{a^n}\right)}{\left(\dfrac{x}{a^n}\right)^2 / a}\right)^{2^{-n}} \leq \frac{a^{\frac{2n+1}{2^n}}}{x^{2^{1-n}}} M^{2^{-n}}. \tag{3}$$

(v) Dễ thấy $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0$ (dùng công thức nhị thức Newton hoặc quy tắc l'Hospital), nên bằng cách cho $n \to +\infty$ trong (3), ta có ngay $g(x) \leq 1$, đpcm.

Lời giải 2 (đại số).

(i) Vẫn như ở Lời giải 1, ta chứng minh được $f(0) = 0$ và $f(x) \geq 0$ với mọi x.

(ii) Vẫn như ở Lời giải 1, ta thấy đpcm là đúng khi $a = 1$ và chỉ còn xét trường hợp $a > 1$.

(iii) Ta viết lại điều kiện thứ nhất dưới dạng

$$f(x)^2 \leq ax^2 f\left(\frac{x}{a}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

và sẽ chứng minh một kết luận trung gian (nhẹ hơn đpcm) rằng

$$f(x) \leq x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Giả sử phản chứng rằng (2) sai; tức là $f(z) > z^2$ với $z\ (\neq 0)$ nào đó. Dùng (1), ta lần lượt có:

$$f\left(\frac{z}{a}\right) > \frac{1}{az^2}(z^2)^2 = \frac{z^2}{a}; f\left(\frac{z}{a^2}\right) > \frac{1}{a(z/a)^2}\left(\frac{z^2}{a}\right)^2 = \frac{z^2}{a};$$

từ đó, $f\left(\dfrac{z}{a^3}\right) > \dfrac{1}{a(z/a^2)^2}\left(\dfrac{z^2}{a}\right)^2 = az^2, \ldots$ Bằng quy nạp, ta có:

$$f\left(\frac{z}{a^n}\right) > a^{2n-5}z^2 \text{ với mọi số tự nhiên } n \geq 2. \tag{3}$$

Do điều kiện thứ hai trong đề toán, vế trái của (3) bị chặn trên, trong khi vế phải lớn tùy ý khi n đủ lớn, vô lý! Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng (2) đúng.

(iv) Bây giờ ta xét hàm phụ h được cho bởi công thức $h(x) := f(x) - \dfrac{x^2}{a} \leq f(x)$ và viết lại (1) theo ngôn ngữ của hàm phụ này:

$$\left(h(x) + \frac{x^2}{a}\right)^2 \leq ax^2\left(h\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x^2}{a^3}\right) \Leftrightarrow h(x)^2 + 2\frac{x^2}{a}h(x) \leq ax^2 h\left(\frac{x}{a}\right).$$

Từ đó, $2\dfrac{x^2}{a}h(x) \leq ax^2 h\left(\dfrac{x}{a}\right) \Rightarrow h(x) \leq \dfrac{a^2}{2}h\left(\dfrac{x}{a}\right)$ (bất đẳng thức này đúng cả khi $x = 0$ vì $h(0) = 0$), và bằng quy nạp ta có:

$$h(x) \leq \left(\frac{a^2}{2}\right)^n h\left(\frac{x}{a^n}\right) \text{ với mọi số tự nhiên } n. \tag{4}$$

(v) Một hệ quả của (2) và (4) là

$$h(x) \leq \left(\frac{a^2}{2}\right)^n f\left(\frac{x}{a^n}\right) \leq \left(\frac{a^2}{2}\right)^n \left(\frac{x}{a^n}\right)^2 = \frac{x^2}{2^n}$$

với mọi số tự nhiên n. Vì n có thể lớn tùy ý nên điều này chỉ đúng khi $h(x) \leq 0$ (với mọi $x \in \mathbb{R}$); từ đây, ta suy ra đpcm.

Bài toán 5 (ĐHSP1HN TST 2012). *Cho dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ được xác định bởi*

$$a_1 = 1 \quad \textit{và} \quad a_n = \frac{2n-3}{2n} a_{n-1} \quad \textit{với mọi } n \geq 2.$$

Ta lập dãy số $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ với $b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy số $(b_n)_{n=1}^{+\infty}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$ và tìm giới hạn đó.

Lời giải.

(i) Rõ ràng $a_n > 0 \;\; \forall n \geq 1$.

(ii) Ta viết lại công thức truy hồi của dãy số $(a_n)_{n=1}^{+\infty}$ dưới dạng

$$a_{i-1} = 2(i-1)a_{i-1} - 2ia_i,$$

rồi lấy $\sum_{i=2}^{n+1}$ hai vế, ta có (với mọi $n \geq 1$):

$$b_n = 2a_1 - 2(n+1)a_{n+1} = 2 - 2(n+1)a_{n+1}. \tag{1}$$

(iii) Mặt khác, $a_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{a_1} = \prod_{i=2}^{n+1} \dfrac{a_i}{a_{i-1}} = \prod_{i=2}^{n+1} \dfrac{2i-3}{2i}$; nên áp dụng bất đẳng thức TBC-TBN ta suy ra

$$\begin{aligned} 0 < (n+1)a_{n+1} = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2i} &= \frac{\sqrt{2n-1}}{2n} \cdot \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sqrt{(2i+1)(2i-1)}}{2i} \cdot \sqrt{2 \cdot 1 - 1} \\ &\leq \frac{\sqrt{2n-1}}{2n} \underset{(n \to +\infty)}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

(iv) Theo định lý về giới hạn kẹp, ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1)a_{n+1} = 0$. Vậy, (1) kéo theo $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 2$.

Bài toán 6. *Chứng minh rằng*

$$2(x^3 + y^3 + z^3) - x^2y - y^2z - z^2x \leq 3$$

với mọi $x, y, z \in [0, 1]$.

Gợi ý. Xem vế trái như là hàm của một biến x, tìm giá trị cực đại của hàm đó trên đoạn $[0, 1]$ để quy bài toán về việc chứng minh một bất đẳng thức chỉ của hai biến $y, z \in [0, 1]$. Tiếp tục phương pháp giảm biến này...

2 MỘT SỐ DẠNG TOÁN OLYMPIC DÙNG PHƯƠNG PHÁP GIẢI TÍCH

Trong phần này ta xét một số dạng toán Olympic mà phát biểu của chúng có vẻ là đại số hay số học thuần túy (hoặc cả hai), nhưng trong lời giải, phương pháp giải tích đóng vai trò cốt yếu.

Bài toán 7. *Giả sử $a, b, c \in \mathbb{Z}$ sao cho $f(n) := an^2 + bn + c$ là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng tồn tại $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ sao cho $f(n) = (\alpha n + \beta)^2$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.*

Lời giải.

(i) Giả sử

$$f(n) = m_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

trong đó $(m_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{N}$. Nếu $a < 0$ thì $f(n) < 0$ khi n đủ lớn, mâu thuẫn với (1). Vậy $a \geq 0$.

(ii) Xét trường hợp $a = 0$. Lúc này, nếu $b \neq 0$ thì $f(n) < 0$ khi n trái dấu với b và có trị tuyệt đối đủ lớn, mâu thuẫn với (1). Vậy $b = 0$, còn c $(\in \mathbb{N})$ là một số chính phương ($m_n = \sqrt{c}$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$). Trong trường hợp này, đpcm là đúng với $\alpha := 0$, $\beta := \sqrt{c}$.

(iii) Xét trường hợp $a > 0$. Lúc này, (1) kéo theo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{m_n^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{n^2} = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{m_n}{n} = \sqrt{a}.$$

Từ đó,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}(m_{n+1} - m_n) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{m_{n+1}^2 - m_n^2}{m_{n+1} + m_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(n+1) - f(n)}{m_{n+1} + m_n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2an + a + b}{m_{n+1} + m_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2a + \dfrac{a+b}{n}}{\dfrac{m_{n+1}}{n+1} \cdot \dfrac{n+1}{n} + \dfrac{m_n}{n}} \\
&= \frac{2a + 0}{\sqrt{a} \cdot 1 + \sqrt{a}} = \sqrt{a}.
\end{aligned}$$

Vì $m_{n+1} - m_n$ chỉ nhận giá trị nguyên, ta suy ra $\alpha := \sqrt{a} \in \mathbb{N}^*$ và tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ (đủ lớn) để $m_{n+1} - m_n = \alpha$ với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$. Với các n đó, từ các kết quả ở trên, ta có:

$$2\alpha^2 n + \alpha^2 + b = 2an + a + b = m_{n+1}^2 - m_n^2 = (\alpha + m_n)^2 - m_n^2 = \alpha^2 + 2\alpha m_n;$$

suy ra: $2\alpha \mid 2\alpha m_n - 2\alpha^2 n = b$, tức là $b = 2\alpha\beta$ với $\beta \in \mathbb{Z}$ nào đó mà

$$2\alpha m_n - 2\alpha^2 n = b = 2\alpha\beta \Rightarrow m_n = \alpha n + \beta \Rightarrow f(n) = m_n^2 = (\alpha n + \beta)^2$$

với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$, và do đó, với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 8. *Hãy xác định tất cả các bộ ba số thực dương* a, b, c *sao cho* $[na]\cdot[nb] = [n^2c]$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải.

(i) Yêu cầu của đề bài được viết lại một cách tương đương (với mọi $n \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned} & (na - \{na\}) \cdot (nb - \{nb\}) = n^2c - \{n^2c\} \\ \Leftrightarrow \quad & n^2ab - na\{nb\} - nb\{na\} + \{na\}\{nb\} = n^2c - \{n^2c\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Chia hai vế của (1) cho n^2 rồi lấy giới hạn khi $n \to +\infty$, ta suy ra $c = ab$. Với điều kiện này, (1) trở thành

$$na\{nb\} + nb\{na\} - \{na\}\{nb\} = \{n^2c\}.$$

Chia hai vế của đẳng thức này cho n rồi lấy giới hạn khi $n \to +\infty$, ta suy ra:

$$\lim_{n\to+\infty} (a\{nb\} + b\{na\}) = 0. \tag{2}$$

Dễ thấy $0 \leq \{na\} \leq \dfrac{1}{b}(a\{nb\} + b\{na\})$, nên theo định lý về giới hạn kẹp thì (2) kéo theo

$$\lim_{n\to+\infty} \{na\} = 0, \text{ và tương tự, } \lim_{n\to+\infty} \{nb\} = 0. \tag{3}$$

(ii) Đến đây có thể chứng minh $a, b \in \mathbb{N}^*$ theo các cách khác nhau như sau:

Cách 1:

- Giả sử a vô tỉ. Khi đó trong biểu diễn thập phân

$$a = (C, c_1c_2\ldots)_{10} = C + \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{c_i}{10^i}$$

tồn tại một chữ số $c \neq 0$ xuất hiện vô hạn lần; tức là, tồn tại các chỉ số $i_1 < i_2 < \cdots$ sao cho $c = c_{i_1} = c_{i_2} = \ldots$ Xét $n = 10^{i_k-1} \underset{(k\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty$, ta có

$$na = (Cc_1\ldots c_{i_k-1}, c_{i_k}\ldots c_{i_{k+1}}\ldots)_{10} \Rightarrow \{na\} > (0, c)_{10} = \frac{c}{10} > 0,$$

mâu thuẫn với (3).

- Vậy a hữu tỉ: $a = \dfrac{p}{q}$ với $p, q \in \mathbb{N}^*$. Xét $n = kq + 1 \underset{(k\to+\infty)}{\longrightarrow} +\infty$, ta có $\{na\} = \{kp + a\} = \{a\}$ nên (3) $\Rightarrow \{a\} = 0$. Từ đó, $a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, $b \in \mathbb{N}^*$.

Cách 2:

- Ta sẽ chứng minh rằng $\{a\} = 0$. Giả sử đpcm là sai. Khi đó $0 < \{a\} < 1$. Với $\varepsilon := \min\{1-\{a\}, \{a\}\} > 0$, theo (3) và định nghĩa của giới hạn, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $0 \leq \{na\} < \varepsilon$ với mọi $n \geq n_0$. Đặc biệt,

$$0 \leq \{n_0 a\}, \{(n_0+1)a\} < \varepsilon. \tag{4}$$

- Lại có

$$\{(n_0+1)a\} = \{[a] + \{a\} + [n_0 a] + \{n_0 a\}\} = \{\{a\} + \{n_0 a\}\}. \tag{5}$$

Nhưng $0 < \{a\} \leq \{a\} + \{n_0 a\} < \{a\} + \varepsilon \leq 1$ nên (4)-(5) kéo theo $\varepsilon > \{(n_0+1)a\} = \{a\} + \{n_0 a\} \geq \{a\}$, mâu thuẫn với định nghĩa của ε! Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng $\{a\} = 0$, tức là $a \in \mathbb{N}^*$. Tương tự, ta có $b \in \mathbb{N}^*$.

(iii) Đảo lại, nếu $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $c = ab$ thì ta có ngay (1) với mọi $n \in \mathbb{N}$. Vậy, các bộ ba cần tìm gồm $a \in \mathbb{N}^*$, $b \in \mathbb{N}^*$, $c = ab$.

Bài toán 9 (dựa trên một đề thi RMC). *Cho ba số thực a_1, a_2, a_3 thỏa mãn điều kiện:*

$$\sum_{i=1}^{3} a_i \cos(a_i x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh rằng một trong ba số a_1, a_2, a_3 bằng 0, hai số còn lại đối nhau.

Lời giải.

(i) Trước hết ta có:

Bổ đề. *Cho $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq m$, là m hàm số tuần hoàn ($m \in \mathbb{N}^*$) và cho $f := \sum_{i=1}^{m} f_i$. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Khi đó, f là một hàm hằng.*

Chứng minh. Xét trường hợp $m = 1$. Lúc này, $f = f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số tuần hoàn, có giới hạn hữu hạn $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Gọi $T \in (0, +\infty)$ là một chu kỳ của f. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x + nT) = L$. Vậy $f(x) \equiv L$, đpcm.

Giả sử kết luận của Bổ đề đã được chứng minh cho trường hợp $m = k$, với $k \in \mathbb{N}^*$ nào đó. Cho $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq k+1$, là $k+1$ hàm số tuần hoàn và cho $f := \sum_{i=1}^{k+1} f_i$ có giới hạn hữu hạn $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Gọi $T \in (0, +\infty)$ là một chu kỳ của f_1 và xét hàm $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi:

$$g(x) := f(x+T) - f(x) = \sum_{i=2}^{k+1} \left(f_i(x+T) - f_i(x)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra g là tổng của k hàm tuần hoàn $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ 2 \le i \le k+1$, trong đó $g_i(x) := f_i(x+T) - f_i(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+T) - \lim_{x\to+\infty} f(x) = L - L = 0,$$

nên theo giả thiết quy nạp thì $g(x) \equiv 0$; suy ra: f là một hàm tuần hoàn (với T là một chu kỳ). Từ đó, theo trường hợp $m = 1$ của Bổ đề thì f phải là một hàm hằng; tức là, kết luận của Bổ đề cũng đúng trong trường hợp $m = k+1$, đpcm.

(ii) Trở lại bài toán, đặt $f_i(x) := \sin(a_i x)$ và $f(x) := \sum_{i=1}^{3} f_i(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta thấy f là tổng của 3 hàm tuần hoàn giới nội. Theo giả thiết,

$$f'(x) = \sum_{i=1}^{3} a_i \cos(a_i x) \le 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra: f đơn điệu không tăng (trên khắp $\mathbb{R}$) nên tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Theo Bổ đề, f phải là một hàm hằng, nên $f'(x) \equiv 0$ và $f'''(x) \equiv 0$. Đặc biệt,

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = f'(0) = 0 \text{ và } \sum_{i=1}^{3} a_i^3 = -f'''(0) = 0.$$

Từ hằng đẳng thức

$$\sum_{i=1}^{3} a_i^3 - 3\prod_{i=1}^{3} a_i = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2 - \sum_{\text{cyc}} a_1 a_2\right)$$

ta thấy $\prod_{i=1}^{3} a_i = 0$. Vậy, một trong ba số a_1, a_2, a_3 bằng 0, hai số còn lại đối nhau (vì $\sum_{i=1}^{3} a_i = 0$).

Bài toán 10. *Tìm điều kiện (cần và đủ) đối với ba số thực a, b, c để hệ bất phương trình*

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c & \le & 0 \\ bx^2 + cx + a & \le & 0 \\ cx^2 + ax + b & \le & 0 \end{cases}$$

1. *có nghiệm (trên $\mathbb{R}$);*

2. *có đúng một nghiệm (trên $\mathbb{R}$).*

Lời giải.

1. Bằng cách cộng vế theo vế các bất phương trình trong hệ, ta thấy nếu hệ nhận $x \in \mathbb{R}$ làm một nghiệm thì

$$(a+b+c)(x^2+x+1) \le 0 \Rightarrow a+b+c \le 0 \tag{1}$$

(vì $x^2 + x + 1 = (x+1/2)^2 + 3/4 > 0$). Đảo lại, dễ thấy nếu (1) được thỏa mãn thì hệ đã cho nhận $x = 1$ làm một nghiệm. Vậy, (1) chính là điều kiện cần và đủ phải tìm.

2. Theo trên, (1) là một điều kiện cần. Ta phải ràng buộc thêm điều kiện để $x = 1$ là nghiệm duy nhất của hệ. Có thể dự đoán được, một trong các ràng buộc phải tìm là:

$$a + b + c = 0. \tag{2}$$

Thật vậy, giả sử phản chứng rằng (2) không được thỏa mãn. Khi đó, do (1), $S := a + b + c < 0$. Đặt

$$f(x) = ax^2 + bx + c, g(x) = bx^2 + cx + a, h(x) = cx^2 + ax + b,$$

ta sẽ chứng minh hệ có vô số nghiệm theo hai cách.

- **Cách 1** (giải tích): Vì f, g, h là các hàm liên tục với

$$f(1) = g(1) = h(1) = S < 0$$

nên khi $x \in \mathbb{R}$ đủ gần 1 thì $f(x), g(x), h(x)$ gần S đến mức cùng dấu với S, nên mọi x như thế đều là nghiệm của hệ đã cho và hệ có vô số nghiệm!

- **Cách 2** (đại số): Có vô số số thực ε thỏa

$$|\varepsilon| < \min\left\{1, \frac{|S|}{3(|a| + |b| + |c|)}\right\}.$$

Với mỗi ε như thế, đặt $x_\varepsilon := 1 + \varepsilon$. Do cách chọn ε, dễ thấy:

$$|f(x_\varepsilon) - S| = |\varepsilon(2a + b + \varepsilon a)| \le |\varepsilon|(3|a| + |b|) \le 3|\varepsilon|(|a| + |b| + |c|) < |S|.$$

Suy ra: $f(x_\varepsilon) < S + |S| = 0$, và tương tự, $g(x_\varepsilon) < 0$, $h(x_\varepsilon) < 0$ nên các x_ε đều là nghiệm của hệ!

Tóm lại, để hệ có duy nhất nghiệm cần có điều kiện (2). Với điều kiện này, nếu ta cộng vế theo vế các bất phương trình trong hệ đã cho, ta sẽ nhận được "bất" đẳng thức $0 \le 0$. Vậy, dấu "=" phải xảy ra ở mỗi bất phương trình của hệ; nói cách khác, hệ trở thành hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c &= 0 \\ bx^2 + cx + a &= 0 \\ cx^2 + ax + b &= 0. \end{cases}$$

Bây giờ, nhận xét: nếu $a = b = c = 0$ thì hệ nhận mọi số thực làm nghiệm, yêu cầu của đề toán không được thỏa mãn! Vậy, ta cần thêm ràng buộc:

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0. \tag{3}$$

Do (2), điều kiện (3) hàm ý hai trong ba số a, b, c khác 0. Không mất tính tổng quát, giả sử $ab \neq 0$. Cũng do (2), mỗi phương trình của hệ nói trên là hệ quả của hệ gồm hai phương trình còn lại. Vậy hệ tương đương với:

$$\begin{cases} ax^2 + bx + c &= 0 \\ bx^2 + cx + a &= 0. \end{cases}$$

Phương trình đầu của hệ này có tập nghiệm $S_1 = \{1, c/a\}$, phương trình thứ hai có tập nghiệm $S_2 = \{1, a/b\}$.

Với điều kiện (2) và $ab \neq 0$ (thay cho (3)), ta sẽ chứng minh rằng:

$$\frac{c}{a} \neq \frac{a}{b}. \tag{4}$$

Thật vậy, nếu (4) sai thì $a^2 = bc$, tức là

$$\begin{aligned}(-b-c)^2 = bc \quad &\Rightarrow \quad (b+c/2)^2 + 3c^2/4 = b^2 + bc + c^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad b + c/2 = c = 0 \Rightarrow b = c = 0,\end{aligned}$$

mâu thuẫn! Vậy (4) đúng, và do đó $|S_1 \cap S_2| = 1$, tức là hệ đã cho quả thực có duy nhất nghiệm $x = 1$.

Kết luận: (2)-(3) là điều kiện cần và đủ để hệ đã cho có đúng một nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 11. *Tìm tất cả các đa thức $P \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho phương trình $P(x) = 2^n$ có ít nhất một nghiệm $x_n \in \mathbb{N}^*$ với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$.*

Lời giải.

(i) Từ giả thiết, dễ thấy rằng $P(x) \equiv \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ trong đó $m := \deg P \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{i=0}^{m} \subset \mathbb{Z}$, $a_m > 0$, và rằng dãy $(x_n)_{n=n_1}^{+\infty}$ tăng ngặt, với $n_1 \in \mathbb{N}^*$ nào đó. Hơn nữa, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ và

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^m}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^m}{P(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_m + \sum_{i=0}^{m-1} a_i x_n^{i-m}} = \frac{1}{a_m};$$

từ đó,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}^m/2^{n+1}}{x_n^m/2^n} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 2^{1/m},$$

nên (theo bất đẳng thức TBC-TBN, dấu "=" không xảy ra)

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} \right) = 2^{1/m} + 2^{-1/m} > 2.$$

Vậy, tồn tại số nguyên dương $n_2 \geq n_1$ sao cho

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n} > 2 \Rightarrow x_{n+1} - x_n > x_n - x_{n-1}$$

khi $n > n_2$.

(ii) Nhưng do $P \in \mathbb{Z}[x]$, ta có $(x_{n+1} - x_n) \mid (P(x_{n+1}) - P(x_n)) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$ nên $x_{n+1} - x_n$ là một lũy thừa của 2 với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vì thế,

$$x_{n+1} - x_n \geq 2(x_n - x_{n-1}) \geq \cdots \geq 2^{n-n_2}(x_{n_2+1} - x_{n_2})$$

khi $n > n_2$. Từ đó, $x_{n+1} \geq x_n + 2^{n-n_2}(x_{n_2+1} - x_{n_2}) > 2^{n-n_2} \quad \forall n > n_2$. Vậy, nếu $m > 1$ thì sẽ có

$$\frac{1}{a_m} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}^m}{2^{n+1}} \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{m(n-n_2)}}{2^{n+1}} = +\infty,$$

vô lý! Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $m = 1$, nghĩa là $P(x) \equiv a_1 x + a_0$.

(iii) Bởi vì $a_1 \mid a_1 x_n = 2^n - a_0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, ta thấy: $0 < a_1 \mid (2^2 - a_0) - (2^1 - a_0) = 2$. Dễ dàng thử lại để đi đến các kết luận sau:

(1) $a_1 = 1$ và $P(x) \equiv x + a_0$ với $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_0 \leq 1$, hoặc

(2) $a_1 = 2$ và $P(x) \equiv 2x + a_0$ với $a_0 = 2b$, $b \in \mathbb{Z}$, $b \leq 0$.

Bài toán 12 (VN TST 2014). *Tìm tất cả các đa thức $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ sao cho mỗi số nguyên dương là ước của một số hạng khác 0 nào đó của dãy số $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ được cho bởi:*

$$x_0 = 2014,\ x_{2n+1} = P(x_{2n}),\ x_{2n+2} = Q(x_{2n+1}) \ \textit{với mọi} \ \ n \geq 0.$$

Lời giải 1. Cho $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa yêu cầu của đề bài. Ta sẽ từng bước chứng minh các kết luận sau:

(i) $\deg P \geq 1$, $\deg Q \geq 1$.

Giả sử phản chứng rằng P hoặc Q là một đa thức hằng với giá trị c $(\in \mathbb{Z})$.

1. Nếu $P(x) = c$ $(\forall x \in \mathbb{Z})$ thì

$$x_n \in \{2014, c, Q(c)\} \quad \forall n \geq 0.$$

2. Nếu $Q(x) = c$ $(\forall x \in \mathbb{Z})$ thì

$$x_n \in \{2014, P(2014), c, P(c)\} \quad \forall n \geq 0.$$

Trong cả hai trường hợp, yêu cầu của đề bài đều không thể thỏa mãn được. Vậy, $\deg P \geq 1$, $\deg Q \geq 1$.

(ii) $\deg Q = 1$.

Giả sử phản chứng rằng $\deg Q > 1$.

Theo (i), $\deg P \geq 1$, nên tồn tại các số thực $M > 0$ và $k \geq 1$ sao cho với mọi $x \in \mathbb{Z}$ mà $|x| \geq M$ ta đều có $k\,|P(x)| \geq |x|$. Đặc biệt, $\lim\limits_{|x|\to\infty} |P(x)| = \infty$.

Nhưng $\deg Q > 1$, nên $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{|Q(x)|}{|x|} = \infty$; vì thế, nếu chọn $N \in (M, +\infty)$ đủ lớn, ta sẽ có: $|Q(x)| > |x|$ và

$$|Q(P(x))| > 2k\,|P(x)| = k\,|P(x)| + k\,|P(x)| \geq k\,|P(x)| + |x|$$

khi $|x| \geq N$.

Yêu cầu của đề bài cho thấy $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\limits_{0\leq \ell\leq 2n} |x_\ell| = +\infty$. Hơn nữa, với n đủ lớn, tồn tại chỉ số $0 \leq i = i(n) \leq 2n$ để

$$|x_i| = \max_{0\leq \ell\leq 2n} |x_\ell| > N.$$

Nếu i lẻ, $i = 2j-1$, ta sẽ có

$$|x_{2j}| = |Q(x_{2j-1})| > |x_{2j-1}| = \max_{0\leq \ell\leq 2n} |x_\ell|,$$

vô lý (vì $2j \leq 2n$)! Vậy, i phải chẵn (khi n đủ lớn), và ta viết $i = 2j$. Với j như thế, hãy lấy $m := |x_{2j+2} - x_{2j}|$. Khi đó,

$$m = |Q(P(x_{2j})) - x_{2j}| \geq |Q(P(x_{2j}))| - |x_{2j}| > k\,|P(x_{2j})| \geq |x_{2j}|,$$

và $m > k\,|P(x_{2j})| \geq |P(x_{2j})| = |x_{2j+1}|$. Cho nên trong số $2j+2$ số hạng (đầu tiên) $x_0, x_1, \ldots, x_{2j}, x_{2j+1}$ của dãy số đã cho, không có số hạng khác 0 nào là bội của m. Chú ý thêm rằng $x_{2j}x_{2j+1} \neq 0$ (do $|x_{2j+1}| = |P(x_{2j})| \geq \dfrac{|x_{2j}|}{k} > \dfrac{N}{k} > 0$). Vì thế, x_{2j} và x_{2j+1} đều không chia hết cho m.

Mặt khác,

$$(x_{2\ell+2} - x_{2\ell}) \mid (Q(P(x_{2\ell+2})) - Q(P(x_{2\ell}))) = x_{2\ell+4} - x_{2\ell+2}$$

và

$$(x_{2\ell+2} - x_{2\ell}) \mid (P(x_{2\ell+2}) - P(x_{2\ell})) = x_{2\ell+3} - x_{2\ell+1}.$$

Vậy, nếu $\ell \geq j$ thì cả $x_{2\ell+2} - x_{2\ell}$, lẫn $x_{2\ell+3} - x_{2\ell+1}$, cùng là bội của $m = |x_{2j+2} - x_{2j}|$. Nhưng, như đã thấy, x_{2j} và x_{2j+1} đều không chia hết cho m, nên cả $x_{2\ell+2}$ lẫn $x_{2\ell+3}$ đều không là bội của m khi $\ell \geq j$.

Suy ra: m không thể là ước của một số hạng khác 0 nào của $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, vô lý! Vậy, $\deg Q = 1$.

(iii) $\deg P = 1$.

Chứng minh: tương tự (ii).

(iv) Bây giờ, $P(x) \equiv ax + b, Q(x) \equiv cx + d$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $ac \neq 0$. Ta sẽ chứng minh rằng $ac = 1$. Theo định nghĩa,

$$\begin{cases} x_{2n+1} = ax_{2n} + b \\ x_{2n+2} = cx_{2n+1} + d \end{cases} \quad \forall n \geq 0.$$

Từ đây, $x_{2n+2} = acx_{2n} + bc + d$ và $x_{2n+3} = acx_{2n+1} + ad + b$ với mọi $n \geq 0$. Hai dãy con này có chung dạng truy hồi $y_{n+1} = ry_n + s$ với $s \in \mathbb{Z}, r = ac$.

Giả sử phản chứng rằng $r \neq 1$. Lúc này,

$$y_n = r^n y_0 + s\sum_{i=0}^{n-1} r^i = r^n y_0 + s\frac{r^n - 1}{r-1} \quad \forall n \geq 1.$$

Nếu $r = -1$ thì $y_n \in \{y_0, -y_0 + s\}$ $(\forall n)$ nên yêu cầu của đề bài không thể thỏa mãn được. Vậy, $|r| > 1$.

Yêu cầu của đề bài cho thấy một trong hai dãy con nói trên có tính chất: với mỗi $q \in \mathbb{N}$ tồn tại $n = n(q) \in \mathbb{N}$ sao cho $r^q \mid y_n \neq 0$. Hiển nhiên, $n \to +\infty$ khi $q \to +\infty$. Hơn nữa,

$$r^{\min\{q,n\}} \mid (y_n - r^n y_0) = s\sum_{i=0}^{n-1} r^i.$$

Vì $\gcd\left(r, \sum_{i=0}^{n-1} r^i\right) = 1$, ta có $r^{\min\{q,n\}} \mid s$ (với mọi q). Nhưng $|r| > 1$ và $\min\{q,n\} \to +\infty$ khi $q \to +\infty$, nên $s = 0$, $y_n = r^n y_0$ $(\forall n)$, và do đó, dễ thấy yêu cầu của đề bài không thể thỏa mãn được. Mâu thuẫn này chứng tỏ rằng $r = ac = 1$.

(v) Cuối cùng, $P(x) \equiv \pm x + b, Q(x) \equiv \pm x + d$, trong đó $b, d \in \mathbb{Z}$ là các số cần tìm. Ta chỉ phải xét hai trường hợp:

- $P(x) \equiv x + b$ và $Q(x) \equiv x + d$ với $b, d \in \mathbb{Z}$. Trong trường hợp này, bằng quy nạp, ta có

  $$x_{2n} = 2014 + n(b+d) \text{ và } x_{2n+1} = 2014 + b + n(b+d) \quad \forall n \geq 0.$$

  Vì thế, một điều kiện cần để yêu cầu của đề bài được thỏa mãn là $b+d \neq 0$. Dưới điều kiện này, yêu cầu của đề bài nói rằng: với mỗi $m \in \mathbb{N}^*$, một trong các đồng dư thức tuyến tính

  $$(b+d)x \equiv -2014 (\text{mod } m), (b+d)x \equiv -(2014+b) (\text{mod } m)$$

  có (vô số) nghiệm $x = n$ trong $\mathbb{N}$. Một cách tương đương,

  $$\gcd(b+d, m) \mid 2014 \ \text{ hoặc } \ \gcd(b+d, m) \mid (2014+b) \ \text{ với mỗi } \ m \in \mathbb{N}^*.$$

  Thật ra, chỉ cần xét $m = |b+d|$ và điều kiện phải tìm là:

  $$(b+d) \mid 2014 \ \text{ hoặc } \ (b+d) \mid (2014+b), \ \text{ trong đó } \ b+d \neq 0.$$

- $P(x) \equiv -x + b$ và $Q(x) \equiv -x + d$ với $b, d \in \mathbb{Z}$. Hoàn toàn tương tự, ta thấy điều kiện cần và đủ để yêu cầu của đề bài được thỏa mãn là

  $$(b-d) \mid 2014 \ \text{ hoặc } \ (b-d) \mid (-2014+b), \ \text{ trong đó } \ b-d \neq 0.$$

Lời giải 2. Ta sẽ đưa ra ở đây một cách chứng minh khác cho cặp bước (ii)-(iii) (giữ nguyên chứng minh của (i) và (iv)-(v)).

(ii)-(iii) $\deg P = 1$, $\deg Q = 1$.

Ta cần:

Bổ đề. *Cho* $a \in \mathbb{Z}$ *và* $T \in \mathbb{Z}[x]$. *Một dãy số* (y_n) *được xác định bởi*

$$y_0 = a, y_{n+1} = T(y_n) \quad \forall n \geq 0.$$

Giả sử mỗi số nguyên dương m *là ước của một số hạng khác 0 nào đó của* (y_n). *Khi đó,* $\deg T = 1$.

Chứng minh. Dễ thấy mọi đa thức hằng T đều không thỏa mãn giả thiết. Giả sử phản chứng rằng $\deg T > 1$. Khi đó, tồn tại số thực $c > 0$ sao cho $|T(x)| > 2|x|$ khi $|x| > c$. Từ giả thiết suy ra: $\lim\limits_{m \to +\infty} \max\limits_{0 \leq \ell \leq m} |y_\ell| = +\infty$. Hơn nữa, nếu gọi $0 \leq n = n(m) \leq m$ là chỉ số bé nhất sao cho $|y_n| = \max\limits_{0 \leq \ell \leq m} |y_\ell|$, thì $n \to +\infty$ khi $m \to +\infty$, và $|y_n| > |y_i|$ với mọi $0 \leq i < n$. Vì thế, ta có thể chọn được $N \in \mathbb{N}^*$ sao cho $|y_N| > \max\{c, |y_0|, |y_1|, \ldots, |y_{N-1}|\}$. Đặc biệt, điều này kéo theo:

$$|y_{N+1}| = |T(y_N)| > 2|y_N|.$$

Lấy $m := |y_{N+1} - y_N| \in \mathbb{N}^*$, ta có

$$m \geq |y_{N+1}| - |y_N| > |y_N| > \max\{|y_0|, |y_1|, \ldots, |y_{N-1}|\}.$$

Bởi vậy, y_N không chia hết cho m. Hơn nữa, m không là ước của số hạng khác 0 nào trong số $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$.

Mặt khác, $y_{n+1} - y_n$ là bội của $y_n - y_{n-1}$ với mọi $n \geq 1$; cho nên $y_{n+1} - y_n$ chia hết cho $m = |y_{N+1} - y_N|$ với mọi $n \geq N$. Suy ra:

$$y_n - y_N = (y_n - y_{n-1}) + (y_{n-1} - y_{n-2}) + \ldots + (y_{N+1} - y_N)$$

là bội của m với mọi $n > N$. Nhưng y_N không chia hết cho m, nên y_n cũng không chia hết cho m với mọi $n > N$ và ta gặp mâu thuẫn! Bổ đề đã được chứng minh.

Ta đã sẵn sàng để chứng minh các kết luận của (ii)-(iii). Đặt $H(x) = P(Q(x))$ và $K(x) = Q(P(x))$. Giả sử phản chứng rằng hoặc $\deg P \geq 2$, hoặc $\deg Q \geq 2$. Khi đó, $\deg H \geq 2$ và $\deg K \geq 2$ (theo (i), $\deg P \geq 1$ và $\deg Q \geq 1$).

Xét dãy con $(x_0, x_2, x_4, \ldots)$, $x_{2(n+1)} = K(x_{2n})$ với mọi $n \geq 0$. Do $\deg K \geq 2$ nên dãy $(y_n) = (x_{2n})$ không thể thỏa mãn giả thiết của Bổ đề. Bởi vậy, tồn tại số nguyên dương m sao cho không số nào trong số các số nguyên dương $m, 2m, 3m, \ldots$ có thể là ước của một số hạng $x_{2n} \neq 0$. Từ đó, với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$ tồn tại số hạng $x_{2n_k+1} \neq 0$ chia hết cho km. Suy ra: dãy con $(x_1, x_3, x_5, \ldots)$, $x_{2n+3} = H(x_{2n+1})$ (với mọi $n \geq 0$), thỏa mãn giả thiết của Bổ đề, và do vậy, $\deg H = 1$, vô lý! Mâu thuẫn này cho ta đpcm.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn học sinh giỏi THPT quốc gia và đề thi chọn đội tuyển VN dự thi IMO các năm gần đây.

[2] IMO shortlists.

[3] *Romanian Mathematical Competitions* (RMCs), Romanian Mathematical Society, Theta Foundation (1997-2007...).

[4] Titu Andreescu and Zuming Feng, *Mathematical Olympiads – Problems and Solutions from Around the World*, the Mathematical Association of America (1998, 1999, 2000, 2001...).

[5] WJ Kaczkor và MT Nowak (Đoàn Chi biên dịch, Nguyễn Duy Tiến hiệu đính), *Bài tập giải tích, tập 1: số thực, dãy số và chuỗi số*, NXB ĐHSP (2003).